Alturas de equilibrio de líquidos en celdas de Hele-Shaw corrugadas bajo penetración capilar espontánea

F. J. Higuera

ETSI Aeronáuticos, UPM, Plaza Cardenal Cisneros, Madrid, Spain

M. Francisco, A. Medina

SEPI-ESIME-A, Instituto Politécnico Nacional, Av. de las Granjas 682,

Col. Sta. Catarina Azcapotzalco D.F. C.P. 02550, Mexico

F. A. Sánchez

FIME, Universidad Autónoma de Nuevo León,

Monterrey, N.L., México

Abstract

Se presenta un método simple y general para calcular las alturas de equilibrio de un líquido que penetra espontáneamente, por capilaridad, en una celda de Hele-Shaw vertical y corrugada. La corrugación se impuso sobre cada una de las paredes interiores de las placas que forman la celda como funciones coseno y de esta forma se generan canales periódicos verticales. Se encuentra que esta corrugación determina complejos perfiles de equilibrio que pueden ser integrados para estimar los volémenes de líquido absorbido, o del aire (gas) desalojado. Se discuten también resultados para celdas corrugadas con una inclinación α respecto a la vertical.

Palabras Clave: Penetración capilar, superficie libre, micro y nano flujos

PACS: 47.55.N-; 47.60.Dx;; 47.61.-k

Equilibrium heights of liquids in corrugated Hele-Shaw cells under spontaneous capillary penetration

Abstract

A simple and general method to calculate the equilibrium heights of a liquid that penetrates spontaneously, due to capillarity, into a corrugated Hele-Shaw cell is presented. A cosine-like corrugation was imposed on each internal face of the plates that made the cell and periodic channels were generated. It were found complex equilibrium heights which allow to evaluate the volumes of absorbed liquid or expelled gas. Equilibrium heights were also evaluated in corrugated tilted cells.

Keywords: Capillary penetration, free surface flows, micro and nano flows

I. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se considera el problema de las alturas de equilibrio que se alcanzan durante la penetración capilar espontánea de un líquido viscoso en una celda de Hele-Shaw corrugada, es decir, en un par de placas paralelas verticales, muy cercanas entre si y con corrugación tranversal a la dirección de flujo. Esta configuración puede considerarse como una idealización simple del flujo capilar en una fractura de una roca real, saturada con dos líquidos inmiscibles, y en donde la irregular separación entre las superficies interiores de la fractura generan patrones de penetración capilar con complejas superficies libres [1, 2]. Similarmente, pero en otro contexto, por medio de la penetración capilar de líquidos poliméricos y cerámicos entre placas corrugadas se elaboran microengranes [3] y otras microestructuras [4]. No obstante, esta novedosa técnica que se conoce como micromoldeo [5] aún carece de las bases teóricas adecuadas para optimizar la penetración capilar en micro y nano canales de geometría compleja.

Hasta donde se sabe, el cálculo del perfil de equilibrio de líquidos en estructuras complejas lo inició Taylor [6] cuando estudió el problema de la forma hiperbólica del menisco entre dos placas verticales que forman un ángulo pequeño entre ellas (diedro) [7]. El cálculo del perfil de equilibrio de líquidos en tubos capilares cuadrados [7], o entre los espacios generados en arreglos de fibras cilindricas sólidas, lleva también a meniscos con perfiles no uniformes que sólo pueden ser descritos de forma aproximada, no exacta [7, 8]. El problema en estas geometrías es que los perfiles crecen mucho en las esquinas y menos en las zonas medias. En términos del peso, el error introducido en los cálculos al dejar de lado la elevación capilar en las esquinas es en ambos casos del 6%. En el caso de tubos capilares cónicos verticales [9] es posible tener *dos alturas* medias de equilibrio cuando los capilares son conos de sección tranversal decreciente (cono normal) y *sólo una* si la sección tranversal es creciente (cono invertido).

En el problema que ahora se estudia el flujo capilar que se desarrolla bajo gravedad es un flujo de película que, bajo una adecuada promediación, es posible formularlo y resolverlo de manera muy simple. Las alturas de equilibrio que resultan son perfiles complejos, expresados por funciones analíticas y en los cuales no hay errores de cálculo involucrados. Contrario a este enfoque, otros autores [10] resolvieron numéricamente el problema de las alturas de equilibrio entre placas corrugadas mediante métodos variacionales, de minimización de la energía potencial local [11]. Desafortunadamente, sus resultados son erroneos ya que las zonas de máxima altura de equilibrio ocurren en zonas donde las placas se separan más. Esto fisicamente no es posible porque la presión capilar es inversamente proporcional a la separación entre las placas, es decir, a menor espacio capilar, mayor altura de equilibrio. Parte de la finalidad de este trabajo es predecir la forma correcta de los perfiles de equilibio, inclusive en una celda corrugada inclinada.

La división de este trabajo es como sigue: en la siguiente sección se formula el problema y se presenta la geometría de la celda corrugada. En la sección III se construye la ecuación para el balance de presiones para las celdas corrugadas verticales y se extiende dicho modelo al análisis de la altura de equilibrio en celdas inclinadas. Se calculan las alturas de equilibrio en ambos casos y se discuten algunas de sus peculiaridades. En la sección IV se calcula analíticamente el volumen retenido en la celda vertical corrugada. Se encuentra que dicho volumen depende fuertemente de la corrugación. Este último resultado es particularmente importante en la industría petrolera porque sustanciales cantidades de petróleo se quedan atrapadas capilarmente en las fracturas reales. Finalmente, en la sección V se resumen las principales conclusiones de este trabajo.

II. EL PROBLEMA

El cálculo de la altura de equilibrio en un capilar cilíndrico permite de inmediato concluir aspectos importantes de este problema. Considerese un tubo capilar cilíndrico vertical de radio R, en el cual penetra por capilaridad un líquido de densidad ρ, viscosidad dinámica μ, tensión superficial σ y ángulo de contacto θ. La presión capilar p_c, responsable de que el líquido ascienda, es $p_c = 2\sigma\cos\theta/R$ y la carga hidrostática que se va generando bajo el campo gravitatorio al ascender el líquido a la altura H en el capilar es $p_H = \rho g H$, donde g es la aceleración de la gravedad. La altura de equilibrio se alcanza cuando ambas presiones se igualan, de manera que la altura de equilibrio resulta ser

$$H_{eq} = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g R}, \tag{1}$$

esta relación es conocida como la ley de Jurin [12] y expresa dos resultados importantes: 1.- que a mayor radio del tubo la altura de de equilibrio es menor y 2.- que la altura de equilibrio no depende de la viscosidad del líquido.

Para el caso de la celda de Hele-Shaw corrugada, en la Fig. 1(a) se muestra esquemáticamente el frente de penetración capilar del líquido que asciende en una celda corrugada en la dirección z. En dicha figura f y $H(y)$ son, respectivamente, la superficie libre y la altura de dicha superficie libre, mientras que en la Fig. 1(b) se presenta un esquema de la sección transversal de la celda, en el plano xy, que generan los perfiles h de las paredes interiores de las placas corrugadas, cuya forma funcional esta dada por

$$h(y) = \pm w \left[1 - (1-\delta) \cos \frac{2\pi y}{\lambda} \right], \tag{2}$$

donde la coordenada horizontal y se extiende hacia $\pm\infty$.

De acuerdo a estos perfiles es claro que el plano $x = 0$ es la zona media entre placas y que $x = \pm w$ son los planos medios respecto a los cuales ocurre la corrugación de amplitud $w(1-\delta)$ y longitud de onda λ en la dirección y. Nótese que sí $\delta = 1$ se obtiene el límite de placas paralelas sin corrugación con separación $2w$, mientras que cuando $\delta \to 0$ la amplitud de la corrugación es muy cercana a w misma, no obstante, el caso $\delta \equiv 0$ esta excluído ya que no se tendría una separación finita entre las placas en $y = \lambda$, así $0 < \delta \leq 1$. Obsérvese también que la separación media entre las placas es $2w$ y se considera que ésta es mucho más pequeña que la longitud capilar $l_c = \sqrt{\sigma/\rho g}$ y la longitud de onda λ, es decir, $2w << (l_c, \lambda)$. En esta aproximación también se supone que localmente la superficie libre esta formada secciones de esfera, con radio principal de curvatura en la dirección x, $R = h/\cos\theta$, donde θ es el ángulo de contacto entre cada placa y el líquido.

Las condiciones antes expuestas son las típicas para un flujo de película y la determinación de la altura de equilibrio en este sistema parte de estos supuestos.

III. ALTURAS DE EQUILIBRIO

A. Celda corrugada vertical

Si la celda esta bajo la presión ambiente, p_a, entonces la presión total en un punto interior y cercano a la superficie libre del líquido es [12]

$$P = p_a - \frac{\sigma}{R} = p_a - \frac{\sigma \cos\theta}{h(y)}, \tag{3}$$

donde $h(y)$ esta dada por la Ec. (2). Por otro lado, para el flujo de película vale la aproximación de la teoría de la lubricación, es decir, que es posible promediar en la profundidad (dirección x) todas las funciones de interés, entre ellas la superficie libre f^* que en general debe de ser una función de x y y, es decir $f^* = f^*(x, y)$. Explícitamente, la superficie libre promediada en la profundidad es $f(y) = 1/(2h) \int_{-h}^{h} f^*(x, y) dx$. Bajo esta aproximación, la ecuación de la superficie libre promediada en la profundidad es

$$f = z - H(y) = 0, \tag{4}$$

y la altura de equilibrio promediada es entonces

$$z = H_{eq}(y). \tag{5}$$

La presión hidrostática a esa altura de equilibrio y en un punto interior del liquido tiene la forma [12]

$$P = p_a - \rho g H_{eq}. \tag{6}$$

Igualando las presiones dadas por las Ecs. (3) y (6), se encuentra que la altura de equilibrio es

$$H_{eq} = \frac{\sigma \cos\theta}{\rho g h(y)}. \tag{7}$$

Sustituyendo el perfil cosenoidal de las placas dado por la Ec. (2), se llega a que la altura de equilibrio es un perfil de la forma

$$H_{eq}(y) = \frac{\sigma \cos\theta}{\rho g w \left[1 - (1-\delta)\cos\frac{2\pi y}{\lambda}\right]}, \tag{8}$$

este perfil de equilibrio es fuertemente dependiente de la amplitud de la corrugación, se extiende hacia $y = \pm\infty$, y obedece el hecho comentado en la introducción de que la altura de equilibrio no depende de la viscosidad.

Como un ejemplo de la utilidad de la Ec. (8), en la Fig. 2(a) se muestran los diferentes perfiles de la altura de equilibrio de la penetración capilar de agua en una celda de Hele-Shaw corrugada llena inicialmente de aire a presión ambiente con dimensiones $w = 100$ μm y $\lambda = 0.01$ m y corrugaciones con valores $\delta = 0.1$, 0.5, 0.85 y 1. Por simplicidad, se asume que el ángulo de contacto $\theta = 0^\circ$, lo cual implica un mojado perfecto. Para el sistema aire-agua la longitud capilar es $l_c = 2.7\times10^{-3}$ m ya que $\rho = 1000$ kg/m^3, $\sigma = 0.072$ N/m y $g = 9.81$ m/s^2.

La Fig. 2(a) muestra como casos extremos que la corrugación con $\delta = 0.1$ (*i.e.*, amplitud igual a $0.9w$) produce alturas máximas de equilibrio de aproximadamente $H_{eq\,\max} = 0.73$ m mientras que las alturas mínimas para esta misma corrugación son $H_{eq\,\min} = 0.05$ m. Por otro lado, la celda de Hele-Shaw sin corrugación ($\delta = 1$) da una sóla altura de equilibrio igual a

$$H_{eqHS} = \frac{\sigma \cos\theta}{\rho g w}, \tag{9}$$

la cual en este caso particular es $H_{eqHS} = 0.07$ m (línea punteada en la Fig. 2(a)). En la Fig. 2(b) se muestran las secciones transversales de las celdas de Hele-Shaw para los valores de δ considerados en el ejemplo, en dicha figura es claro que el valor medio de la separación entre las placas de la celda es $2w = 200$ μm.

B. Celda corrugada inclinada a un ángulo α

Desde un punto de vista fundamental resulta interesante estudiar el problema de los perfiles de equilibrio en una celda corrugada inclinada, ya que hasta donde se sabe este problema no se ha resuelto previamente.

Para estudiar este problema basta con inclinar a un ángulo α la celda vertical corrugada y asumir las mismas condiciones que en el caso anterior. Las alturas de equilibrio en la celda inclinada ahora se describiran con el sistema de coordenadas rotado (y', z'). Ver Fig. 3. Las coordenadas del sistema rotado se relacionan con el sistema vertical, (y, z), de manera que [13]

$$y = y' \cos\alpha - z' \sin\alpha, \tag{10}$$

$$z = y' \sin\alpha + z' \cos\alpha. \tag{11}$$

Usando las Ecs. (2) y (10) es claro que en el sistema rotado las ecuaciones de los perfiles de las paredes de las placas tienen ahora la forma

$$h = \pm w \left[1 - (1-\delta) \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(y' \cos\alpha - z' \sin\alpha \right) \right]. \tag{12}$$

Entonces, en este sistema la presión total en un punto interior y cercano a la superficie libre, $z' = H'_{eq}$, adquiere la forma

$$P = p_a - \frac{\sigma\cos\theta}{h} = p_a - \frac{\sigma\cos\theta}{w\left[1-(1-\delta)\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(y'\cos\alpha - H'_{eq}\sin\alpha\right)\right]}. \tag{13}$$

Por otro lado, la presión hidrostática a la altura de equilibrio $z' = H'_{eq}$ y en un punto interior del liquido tiene la forma [12]

$$P = p_a - \rho g H'_{eq}. \tag{14}$$

Igualando las presiones dadas por las Ecs. (13) y (14), se encuentra que la altura de equilibrio en el sistema rotado, H'_{eq}, esta dada por la ecuación trascendente

$$H'_{eq} = \frac{\sigma\cos\theta}{w\rho g\left[1-(1-\delta)\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(y'\cos\alpha - H'_{eq}\sin\alpha\right)\right]}. \tag{15}$$

Rearreglando términos se obtiene una ecuación trascendente más simple cuya forma es

$$\frac{\lambda}{2\pi\cos\alpha}\arccos\left(\frac{1-\frac{\sigma\cos\theta}{H'_{eq}w\rho g}}{(1-\delta)}\right) + H'_{eq}\tan\alpha = y'. \tag{16}$$

Para propósitos de comparación, en la Fig. 4 se grafican, usando la Ec. (16), los perfiles de equilibrio en una celda corrugada inclinada a α =20° respecto a la vertical. Se ha considerado la entrada de agua bajo mojado perfecto en una celda llena de aire y se han supuesto los mismos valores de w y λ que en el caso vertical, *i.e.* $w = 100$ μm y $\lambda = 0.01$ m; las corrugaciones de las gráficas tienen valores $\delta = 0.1$ (Fig. 4(a)) y $\delta = 0.5$ (Fig. 4(b)). Observese que las alturas máximas y mínimas alcanzadas en estas celdas son del mismo orden de magnitud que las de las celdas verticales. Por otro lado, el caso con $\delta = 1$ (celda sin corrugación) se analiza con la Ec. (15) y produce la misma altura de equilibrio que en la celda no inclinada, $H'_{eqHS} = \sigma\cos\theta/(\rho g w) = 0.07$ m. Este resultado es obvio ya que si la celda no tiene corrugación, el liquido no distingue entre una celda inclinada y una no inclinada. Un aspecto muy importante de los perfiles en las celdas corrugadas inclinadas es que son sustancialmente más complejos que los de las celdas corrugadas verticales y son asimétricos, aún en el sistema coordenado (y', z').

IV. VOLUMEN DE LÍQUIDO EN CELDAS CORRUGADAS VERTICALES

Un resultado importante que se puede derivar analíticamente usando la Ec. (8) esta relacionado con la cantidad de líquido que invade a la celda vertical corrugada (o la cantidad de gas desalojado de dicha celda) en una unidad de longitud λ cuando se alcanza la altura de equilibrio. Este volumen, en una unidad de longitud λ, es

$$V_\lambda = 2w \int_0^\lambda H_{eq}(y) dy, \tag{17}$$

donde $H_{eq}(y)$ esta dada por la Ec. (8) y se ha considerado que la separación media entre placas es $2w$. El cálculo de la integral lleva a que

$$V_\lambda = \frac{2\lambda\sigma\cos\theta}{\rho g}\left[\frac{1}{\sqrt{2\delta-\delta^2}}\right]. \tag{18}$$

Nótese que si la celda no tuviese corrugación, $\delta = 1$, el volumen de líquido en dicha celda de Hele-Shaw sería

$$V_{HS} = \frac{2\lambda\sigma\cos\theta}{\rho g}. \tag{19}$$

Recordando la Ec. (9), se encuentra que este volumen puede se expresado en función de la altura de equilibrio de la celda de Hele-Shaw sin corrugación, como

$$V_{HS} = 2w\lambda H_{eqHS}. \tag{20}$$

La Ec. (19) puede usarse para expresar también el volumen en una celda corrugada, Ec. (18), como

$$V_\lambda = V_{HS}\left[\frac{1}{\sqrt{2\delta-\delta^2}}\right], \tag{21}$$

es conveniente recordar, como se discutió al inicio, que $0 < \delta \leq 1$, por lo que el volumen en la celda corrugada en general es mayor o igual que el volumen en la celda no corrugada, *i.e.*, $V_\lambda \geq V_{HS}$.

A manera de ejemplo, se pueden estimar directamente los volúmenes de líquido atrapados en celdas con diferentes corrugaciones a partir de graficar la Ec.(21) en la forma

$$\frac{V_\lambda}{V_{HS}} = \left[\frac{1}{\sqrt{2\delta-\delta^2}}\right]. \tag{22}$$

La Fig. 5 muestra cómo se incrementa el volumen retenido en función del incremento de la corrugación ($\delta \to 0$): cuantitativamente, si $\delta = 0.85$ el volumen retenido es $1.01V_{HS}$, es decir, 1.01 veces el volumen de la celda de Hele-Shaw sin corrugación, mientras que si $\delta = 0.1$ el volumen se incrementa hasta aproximadamente $2.3V_{HS}$. Lógicamente, en una celda con n corrugaciones el volumen de líquido retenido será nV_λ. El cálculo de los volúmenes retenidos en las celdas corrugadas inclinadas a un ángulo α no es posible hacerlo en forma analítica, pero no es difícil estimar que, en orden de magnitud, los volúmenes de líquido retenido son justamente del mismo orden que los estimados para el caso vertical porque las alturas máximas y mínimas de los perfiles de equilibrio, en las celdas inclinadas, son del mismo orden de magnitud que en las celdas verticales.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha empleado una técnica, derivada de la teoría de la lubricación, que permite estudiar de manera simple las alturas de equilibrio en celdas verticales de Hele-Shaw corrugadas, en las cuales entra líquido por penetración capilar espontánea. El estudio teórico de las alturas de equilibrio en celdas corrugadas verticales o inclinadas permite concluir que la penetración capilar es compleja y que se forman perfiles de equilibrio que pueden incrementar sustancialmente las alturas máximas de equilibrio y los volúmenes de líquido retenido, en comparación con las celdas de Hele-Shaw sin corrugación. Los resultados aquí reportados son de interés para comprender aspectos fundamentales como las condiciones de equilibrio que se alcanzan durante la construcción de micro y nano estructuras formadas con las modernas técnicas de micromoldeo. En otro contexto, los resultados de las alturas de equilibrio y de los volúmenes retenidos también pueden ser de importancia en la industria petrolera, principalmente en los yacimientos fracturados, en donde la existencia de grandes poblaciones de fracturas verticales e inclinadas y un conocimiento detallado de la estructura de las fracturas posibilitan la estimación de los volúmenes de fluidos residuales de gran importancia económica como el petróleo y el gas.

Agradecimientos.- Este trabajo fué realizado con el apoyo del IPN, Proyecto 20071443, y del PAICYT-UANL. Los autores también agradecen el apoyo del CONACyT bajo el proyecto 62054.

---

[1] P. Dietrich, R. Helmig, M. Sauter, Hotzl, J. Kongeter, G. Teustch, *Flow and transport in fractured porous media*, Springer 2005.

[2] G. I. Barenblatt, V. M. Entov, V. M. Ryzhik, *Theory of fluid flows through natural rocks*, Kluwer, Dordrecht, Países Bajos, 1990.

[3] P. Jin, Y.L. Gao, N. Liu, J.B. Tan, K. Jian, Design and fabrication of alumina micro reciprocating engine, Jour. Phys.: Conference Series **48** 1471 (2006).

[4] S.-J. Ahn, J. Moon, Microfluidic patterning of ceramic microstructures, Jour. Ceramic Soc. Japan, Special Issue **112** S156 (2004).

[5] E. Kim, Y.Xia, G. Whitesides, Polymer microstructures formed by moulding in capillaries, Nature **376** 581 (1995).

[6] B. Taylor, Philos. Trans. R. Soc. London, **27** 538 (1712). Taylor fué el famoso matemático ingés, contemporáneo de Newton, quien desarrolló la serie que lleva su nombre.

[7] J. Bico, D. Quére, Rise of liquids and bubbles in angular capillary tubes, Jour. Colloid Interface Sci. **247** 162 (2002).

[8] H. M. Princen, Capillary phenomena in assemblies of parallel cylinders, Jour. Colloid Interface Sci. **30** 359 (1969).

[9] M. M. Kusakov, D. N. Nekrasov, Ascenso de líquidos en capilares de sección variable e histéresis capilar, Dokladi Akademi Nauk URSS, **119** 107 (1958).

[10] A. Borhan, K. K. Rungta, A. Marmur, Capillary penetration of liquids between periodically corrugated plates, Jour. Colloid Interface Sci. **146** 425 (1991).

[11] A. Marmur, Capillary rise and hysteresis in periodic porous media, Jour. Colloid Interface Sci. **129** 278 (1989).

[12] P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré, *Capillarity and wetting phenomena: drops, bubbles, pearls, waves*, Springer, Berlin, 2004.

[13] C. H. Lehmann, *Geometría analítica*, Limusa, Mexico, 1980.

PIES DE FIGURA

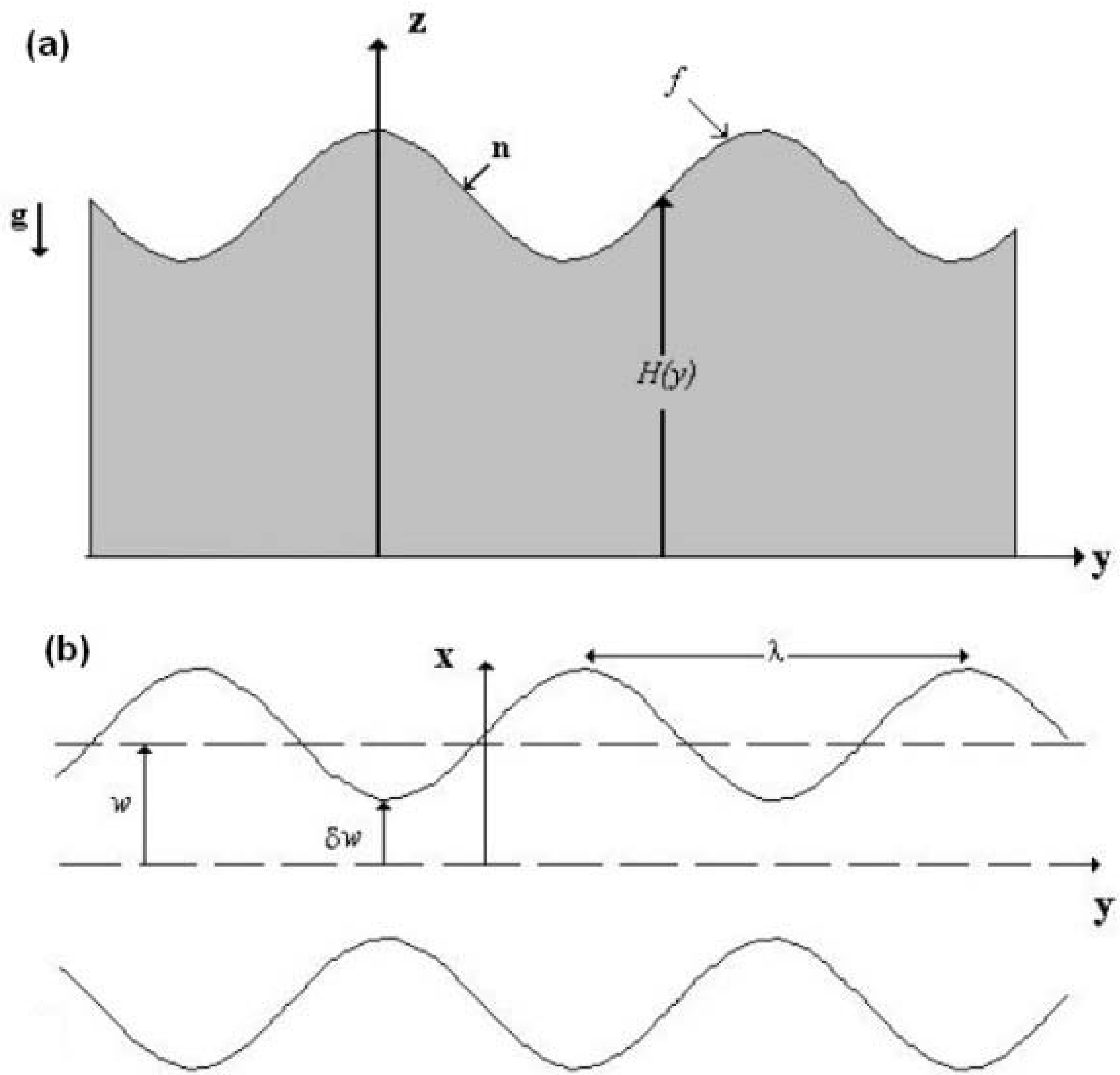
Fig. 1. (a) Representación esquemática de la altura de equilibrio alcanzada bajo el campo gravitatorio en una celda de Hele-Shaw vertical corrugada. En dicha figura la superficie libre, promediada con la profundidad, es f y $H(y)$ es el perfil de la altura de equilibrio (ver texto). Ambas crecen en la dirección z. (b) Vista esquemática de la sección transversal del canal corrugado, en el plano xy, en donde se especifican los planos medios de las corrugaciones, $x = \pm w$, la longitud de onda de la corrugación, λ, a lo largo de la dirección y. De esta figura es evidente que la amplitud de la corrugación es $w(1 - \delta)$.

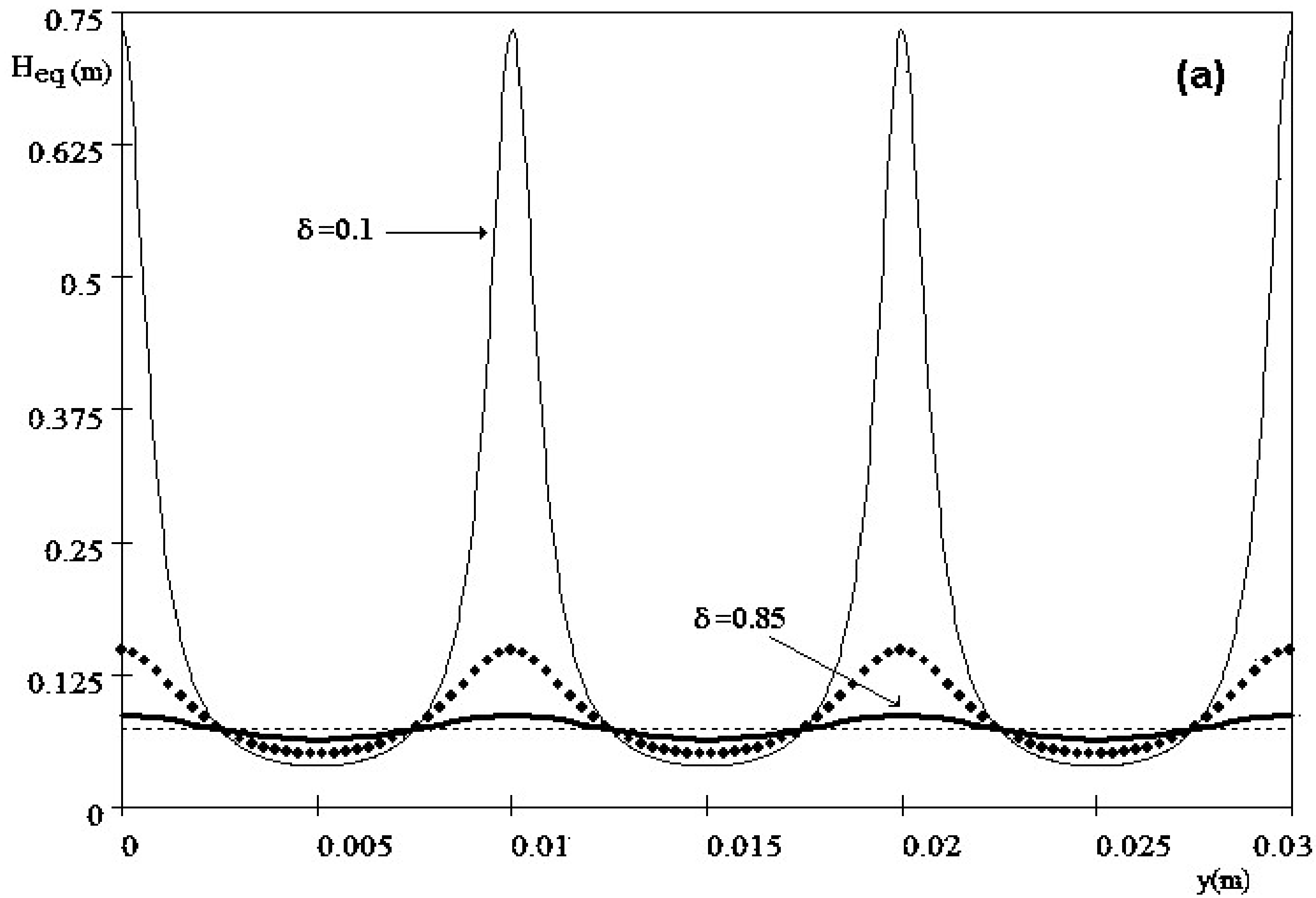
Fig. 2. (a) Alturas de equilibrio, calculadas a partir de la Ec. (8), se asume que agua penetra en celdas llenas originalmente de aire. Las alturas de equilibrio son en realidad perfiles con valores de $\delta = 0.1$ (——), $\delta = 0.5$ (♦♦♦♦), $\delta = 0.85$ (———) y $\delta = 1$ (- - - -). El caso con $\delta = 1$ es el llamado caso de la celda de Hele-Shaw sin corrugación. (b) Perfiles de las placas corrugadas en donde se emplearon los mismos valores de δ y los mismos tipos de líneas que en la Fig. 2(a).

Fig. 3. Esquema de una celda corrugada inclinada a un ángulo α respecto a la vertical. En esta figura se muestran los sistemas de coordenadas (y, z) y (y', z').

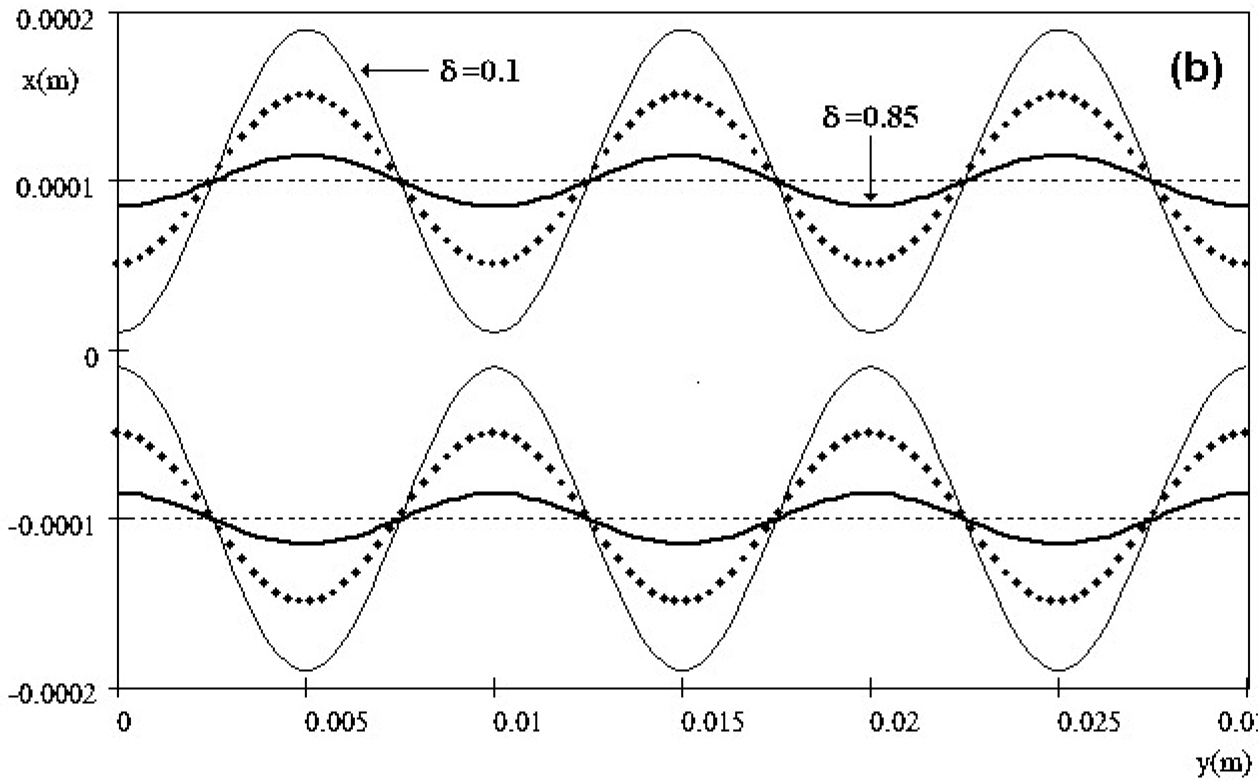
Fig. 4. Alturas de equilibrio en una celda corrugada con (a) $\alpha = 20°$ y $\delta = 0.1$ y (b) $\alpha = 20°$ y $\delta = 0.85$. En estas figuras sólo se han graficado pequeños intervalos de los perfiles de equilibrio.

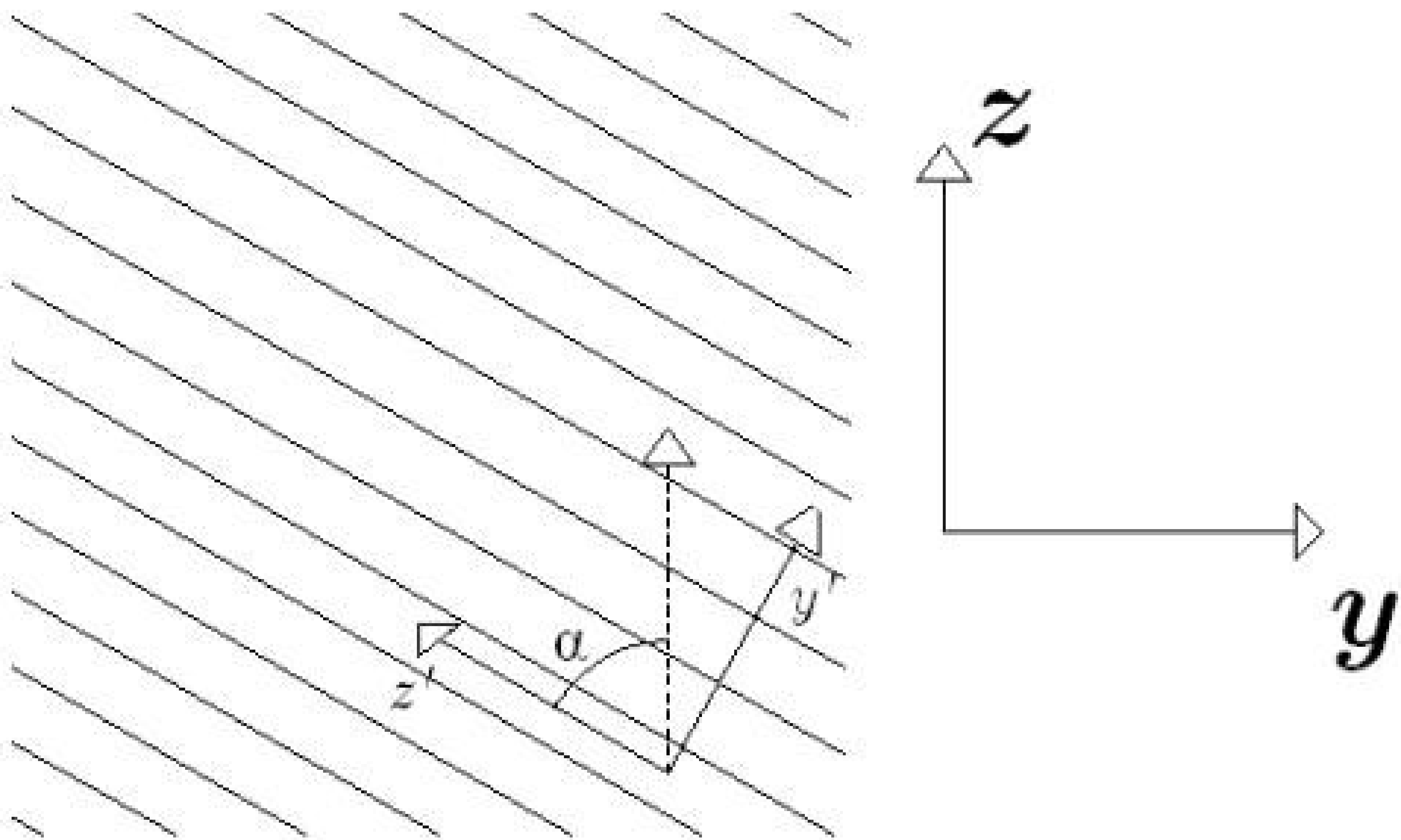
Fig. 5. Gráfica de V_λ/V_{HS} como función de δ. Nótese que a medida que la corrugación se hace más intensa ($\delta \to 0$) el volumen en la celda corrugada, V_λ, es cada vez mayor que el volumen en la celda sin corrugación, V_{HS}.

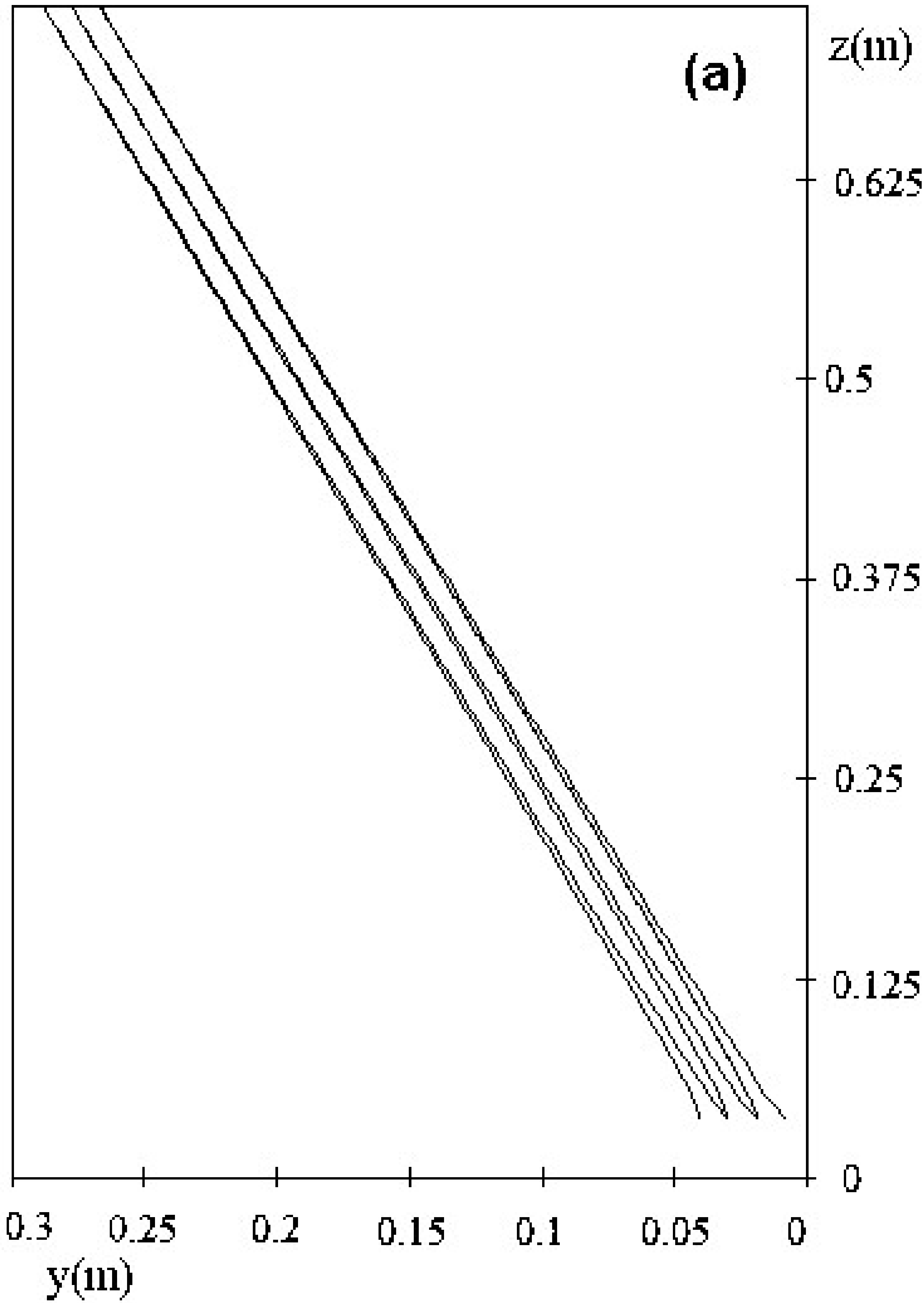

(a)
z
g
n
f
H(y)
y
(b)
x
λ
w
δw
y



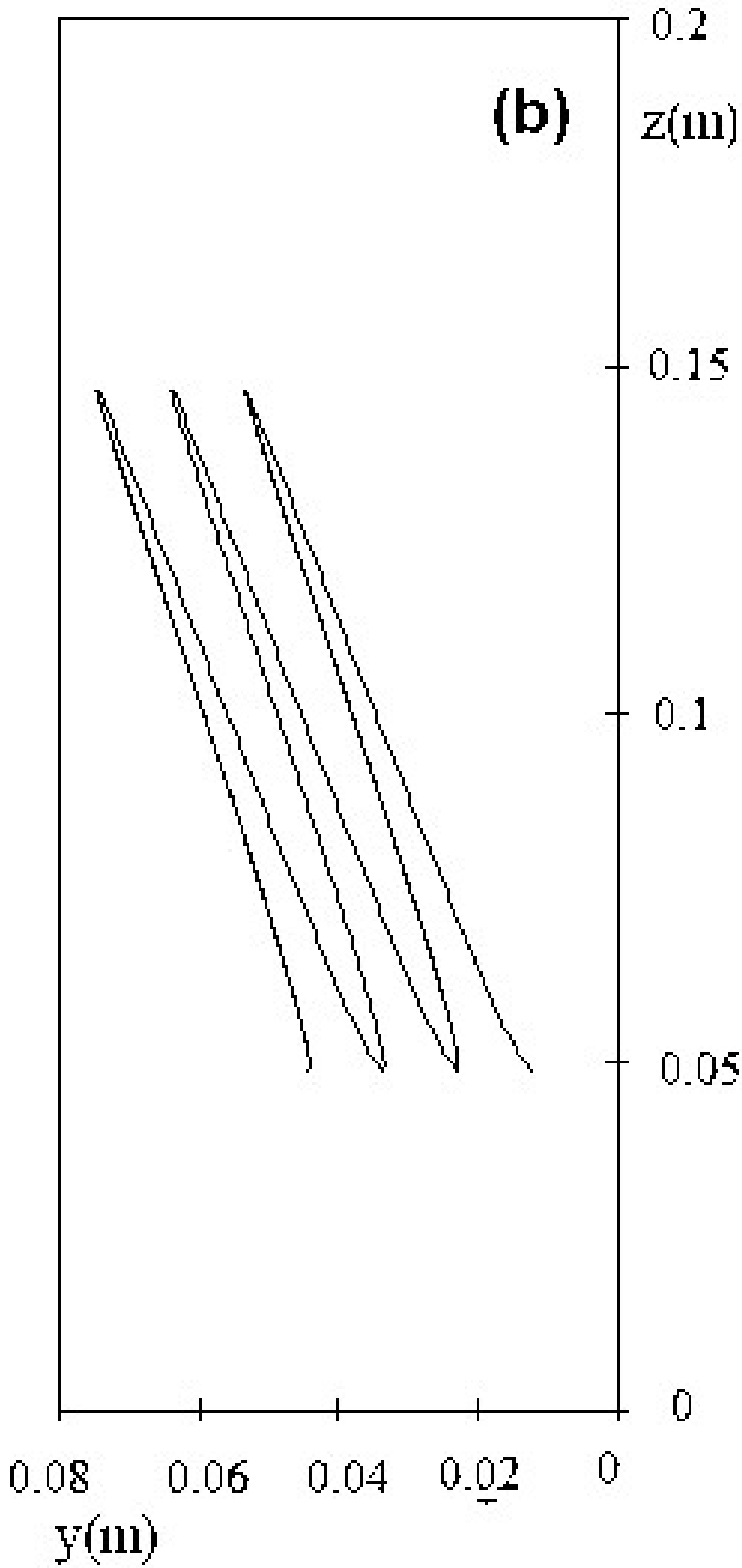
0.75
H_{eq} (m)
(a)
0.625
δ =0.1
0.5
0.375
0.25
δ =0.85
0.125
0
0
0.005
0.01
0.015
0.02
0.025
0.03
y(m)


0.0002
x(m)
δ =0.1
(b)
δ =0.85
0.0001
0
-0.0001
-0.0002
0
0.005
0.01
0.015
0.02
0.025
0.03
y(m)

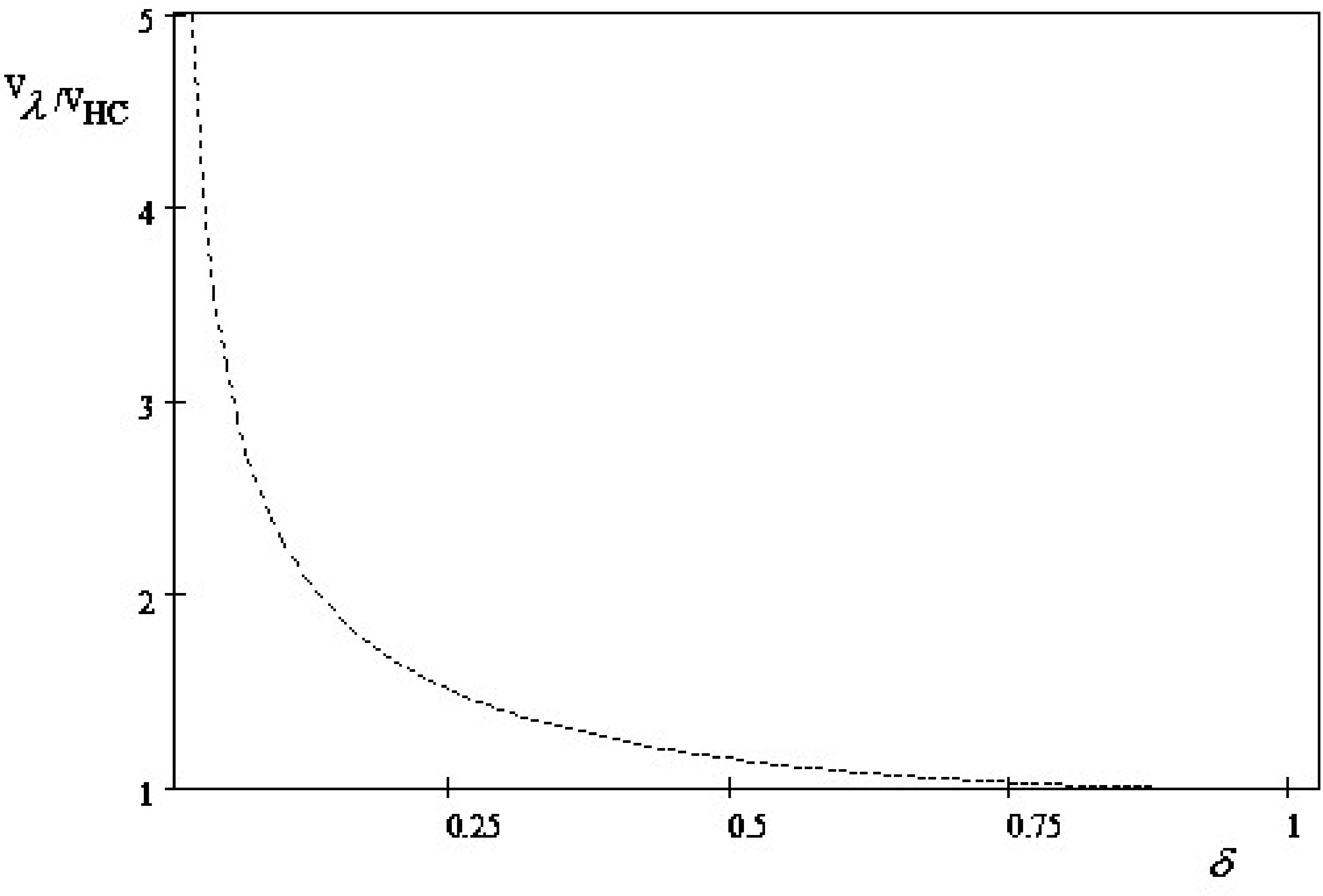

z
y
α
z'
y'



z(m)
(a)
0.625
0.5
0.375
0.25
0.125
0
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
y(m)



(b)
z(m)
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0.08
0.06
0.04
0.02
0
y(m)



V λ /V HC
5
4
3
2
1
0.25
0.5
0.75
1
δ